

HERLEITUNGEN VON ELEMENTAREN ABLEITUNGSREGELN

by Nichtnäherdefiniert
5.12.2003-6.12.2003

Index

1. [Differenzenquotient](#)
2. [Faktorregel](#)
3. [Konstantenregel](#)
4. [Summenregel](#)
5. [Produktregel](#)
6. [Quotientenregel](#)
7. [Potenzregel \(für natürlichen Exponenten\)](#)
8. [Kettenregel](#)
9. [Exponentialregel](#)
10. [Logarithmenregel](#)
11. [Potenzregel \(für reelle Exponenten\)](#)
12. *Trigonometrische Funktionen*
 - a. [Sinus](#)
 - b. [Cosinus](#)
 - c. [Tangens](#)
 - d. [Cotangens](#)

Vorbemerkung:

Ich gehe in dieser kurzen Zusammenfassung der Herleitungen der elementaren Ableitungsregeln nicht auf die unmittelbar damit zusammenhängenden Definitionen und Anwendungen von Grenzwert, Grenzwertsätze, Stetigkeit und Konvergenzkriterien ein.

DIFFERENZENQUOTIENT

Aus linearen Funktionen (Abbildungen mit linearer Zuordnungsvorschrift) ist der Differenzenquotient, der sich aus dem sog. Steigungsdreieck ableitet bekannt:

$$m(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Da für eine beliebige Funktion gilt $f(x) = y$, lässt sich die Formel umschreiben

$$m(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Dieses ist für eine Funktion beliebiger Ordnung die Sekantensteigung, der Sekante, die durch zwei Punkte auf dem Graphen von f geht. Um die Sekantensteigung möglichst genau der Tangentensteigung an der Stelle x_1 annähern zu lassen, muss der Punkt $(x_2, f(x_2))$ sich theoretisch „unendlich nahe“ am Punkt $(x_1, f(x_1))$ befinden. Dieses stellt man durch die Grenzwertschreibweise dar. (für eine fachlich korrekte Definition siehe im Internet unter „Epsilon-Umgebung“ oder „Epsilontik“).

Daher gilt für die Steigungsfunktion bzw. „1. Ableitung“ nach Substitution von $x_2 - x_1 := h$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Aus dieser Grundform der Tangentensteigung werden die Regeln der Ableitungen bzw. Ableitungen anderer Funktion hergeleitet.

FAKTORENREGEL

Oft tauchen Funktionen, die sich aus einem oder mehreren Faktoren (Konstanten) zusammensetzen auf. Bei Ableitungen dieser Funktionen verwendet man die sog. „Faktorenregel“

$$f(x) = k \cdot u(x)$$

- $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
- $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k \cdot u(x+h) - k \cdot u(x)}{h}$
- $= k \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$
- $f'(x) = k \cdot u'(x)$

Folgerung:

Ein konstanter Faktor bleibt bei der Ableitung erhalten.

KONSTANTENREGEL

$$f(x) = k$$

Da der Ordinatenwert dieser Funktion sich nicht ändert, also die Gerade eine parrallele zur Abszisse ist, gilt $f(x_0) = f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_n)$

- $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h}$
- $f'(x) = 0$

Folgerung:

Eine Konstante als Summand, Minuend bzw. Subtrahent fällt beim Ableiten weg.

SUMMENREGEL

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

- $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x) + v(x+h) - v(x)}{h}$
- $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h}$
- $f'(x) = u'(x) + v'(x)$

Folgerung:

Die Ableitung erfolgt durch die Addition der Ableitungen der Summanden.

PRODUKTREGEL

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

- $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(x)}{h}$
- $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) \cdot v(x+h) - u(x+h) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x) + u(x+h) \cdot v(x)}{h}$
- $= u(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x) - u(x) \cdot v(x) + u(x+h) \cdot v(x)}{h}$
- $= u(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-u(x) \cdot v(x) + u(x+h) \cdot v(x)}{h}$
- $= u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$
- $\underline{f'(x) = u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x)}$

Folgerung:

Die Ableitung einer Funktion, die sich aus zwei Faktoren (aufzufassen als ein Produkt zweier Funktionen) zusammensetzt, wird abgeleitet, indem man das Produkt aus der Ableitung der ersten Funktion mit der zweiten Funktion mit dem Produkt aus der Ableitung der ersten Funktion mit der zweiten Funktion addiert.

QUOTIENTENREGEL

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

- $u(x) = v(x) \cdot f(x)$
- $u'(x) = v'(x) \cdot f(x) + v(x) \cdot f'(x)$
- $f'(x) = \frac{u'(x) - v'(x) \cdot f(x)}{v(x)}$

- $f'(x) = \frac{u'(x) - \frac{v'(x) \cdot u(x)}{v(x)}}{v(x)}$
 - $f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$
-

Folgerung:

Der Zähler unterscheidet sich von der Produktregel nur durch die Umkehrverknüpfung vor dem zweiten Summanden! Die Ableitung erhält man durch die Division dieses Terms durch das Quadrat des Nenners der Stammfunktion.

Faustregel:

Bei Polynomen (Funktionen der Form $f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + \dots + a_nx^{n-1}$) ist in der Regel die 1. Ableitung einen Grad geringer als die Stammfunktion.

POTENZREGEL

$$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \quad g \circ f$$

- $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$
- $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot h^k \right) - x^n}{h}$
- $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot h^k}{h}$
- $= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot h^{k-1}$
- $= \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} + \lim_{h \rightarrow 0} \left(\binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot h + \binom{n}{3} \cdot x^{n-3} \cdot h^2 + \dots + h^{n-1} \right)$
- $= \frac{n!}{(n-1)!} \cdot x^{n-1}$
- $= \underline{n \cdot x^{n-1}}$

Folgerung:

Eine Potenz leitet man ab, indem man den Exponenten als Faktor vor die Potenz zieht und den Exponenten um 1 verringert. ACHTUNG: Diese Herleitung gilt nur für natürliche Exponenten, später wird aber gezeigt, dass die Regel auch für reelle Exponenten gilt.

KETTENREGEL

Oftmals trifft man auf Hintereinanderabbildungen (Kompositionen) von Funktionen. D.h., zu erst wird x durch eine Zuordnungsvorschrift auf $f(x)$ abgebildet und danach $f(x)$ durch eine Zuordnungsvorschrift auf $g(f(x))$ oder kurz $g \circ f$.

Sei nun eine Funktion als Komposition von zwei Abbildungen aufzufassen:

$$f(x) = g(t(x))$$

- $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t(x+h)) - g(t(x))}{h}$
- $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t(x+h)) - g(t(x))}{h} \cdot \frac{t(x+h) - t(x)}{t(x+h) - t(x)}$
- $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t(x+h)) - g(t(x))}{t(x+h) - t(x)} \cdot \frac{t(x+h) - t(x)}{h}$
- $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t(x+h)) - g(t(x))}{t(x+h) - t(x)} \cdot t'(x)$
- $t(x+h) - t(x) = j$
- Betrachtet man h als die Differenz der von $t(x+h) - t(x)$, so ist j die Differenz von $g(t(x+h)) - g(t(x))$ und mit $h \rightarrow 0$ gilt auch $j \rightarrow 0$
- $= t'(x) \cdot \lim_{j \rightarrow 0} \frac{g(t(x) + j) - g(t(x))}{j}$
- $f'(x) = g'(t(x)) \cdot t'(x)$

Folgerung:

Eine als Komposition zweier (oder mehrerer) Abbildungen auffassbare Funktion leitet man ab, in dem man die äußere Ableitung mit der inneren multipliziert.

$$[g \circ f]' = g' \cdot f'$$

$$\text{Innere Ableitung} \cdot \text{Äußere Ableitung } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

EXPONENTIALREGEL

$$f(x) = b^x$$

- $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^{x+h} - b^x}{h}$
- $= b^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h}$
- $b^h - 1 = k \Leftrightarrow h = \log_b(k + 1)$
- $= b^x \cdot \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{\log_b(k + 1)}$
- $= b^x \cdot \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\log_b(k + 1)^{\frac{1}{k}}}$
- $\lim_{k \rightarrow 0} (k + 1)^{\frac{1}{k}} = e \approx 2,718281828459$
- $= b^x \cdot \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\log_b(e)}$
- $\log_b e = \frac{\ln(e)}{\ln(b)}$
- $f'(x) = b^x \cdot \ln(b)$

Folgerung:

Eine Exponentialfunktion wird abgeleitet, in dem man die Stammfunktion mit dem natürlichen Logarithmus (logarithmus naturalis) der Basis multipliziert.

LOGARITHMENREGEL

$$f(x) = \log_b(x)$$

Umkehrregel:

Eine Umkehrfunktion bzw. inverse Abbildung hebt die ursprüngliche Funktion bzw. Abbildung auf. (Wenn die Abbildung bijektiv ist, sonst gibt es keine Inverse).

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

Nach der Potenzregel folgt:

$$[f^{-1}(f(x))]' = 1$$

Nach der Kettenregel folgt:

$$f^{-1}(x) \cdot f'(x) = 1$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$\log_b x = z$$

Die Logarithmusfunktion ist als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion zu verstehen.

- $b^z \cdot \ln(b) = \frac{1}{f'(x)}$
- $= \frac{1}{b^z \cdot \ln(b)}$
- $f'(x) = \frac{1}{\ln(b) \cdot x}$

Folgerung:

Die Ableitung einer Logarithmusfunktion ist der Kehrwert des Produkts aus dem natürlichen Logarithmus und dem Argument der Stammfunktion.

POTENZREGEL

(FÜR REELLE EXPONENTEN)

$$f(x) = x^r, \quad x, r \in \mathbb{R}$$

- $f'(x) = e^{r \cdot \ln(x)}$
- $= e^{r \cdot \ln(x)} \cdot \frac{r}{x}$
- $= x^r \cdot \frac{r}{x}$
- $f'(x) = r \cdot x^{r-1}$

Folgerung:

Die Regel bleibt auch für reelle Exponenten gleich.

SINUSFUNKTION

$$f(x) = \sin(x)$$

- $f'(x) = -1 - \cot^2(x)$ $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$
- *Nach den Additionstheoremen folgt*
 $\sin(a+b) = \sin(a) \cdot \cos(b) + \sin(b) \cdot \cos(a)$
- $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x) - \sin(x)}{h}$
- $= \cos(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h}$
- $f'(x) = \cos(x)$

COSINUSFUNKTION

$$f(x) = \cos(x)$$

- $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
- $f'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1)$
- $f'(x) = -\sin(x)$

TANGENSFUNKTION

$$f(x) = \tan(x)$$

- $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
- $f'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$
- $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$

COTANGENSFUNKTION

$$f(x) = \cot(x)$$

- $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$
- $f'(x) = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)}$
- $f'(x) = -1 - \cot^2(x)$